1178　有理型函數ノ Normal family.

京大　井草　準一

1° 領域Dデ定義サレタ有理型函數全体$\Omega(D)$ニ次ノ Metric ヲ導入シマス。

$$\rho(f,g)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\nu}}\,\frac{[f,g]_{\nu}}{1+[f,g]_{\nu}}$$

$$\left(\begin{array}{l} [f,g]_{\nu}=\sup_{z\in\overline{\Delta}_{\nu}}[f(z),g(z)] \\ \\ [f,g]=\dfrac{|f-g|}{\sqrt{(1+|f|^2)(1+|g|^2)}} \\ \\ \overline{\Delta}_1\subset\overline{\Delta}_2\subset\cdots\subset\overline{\Delta}_{\nu}\subset\cdots\to D \end{array}\right)$$

サウスルト$\Omega(D)$ハ complete[1] metric space ニナリマス。茲デ$\Omega(D)\supset\mathfrak{f}(D)$デ$\Omega(D)$ニ於テ compact ナ supspace $\mathfrak{f}(D)$ヲ normal family ト云フノデアリマス。又 $\xi\in D$デ normal family ト云フノデアリマス。又 $\xi\in D$デ normal デアルトハ、或ル$U_f(\xi)\subset D$デ$\mathfrak{f}(U_f(\xi))$ガ normal デアル事デアリマス。

次ニ$\mathfrak{f}(D)$ノ各函数ハ Riemannsphere ノ上ノ coveringsurface ヲ generate 致シマス。今此ノ coveringsurface ノ class ヲ$\mathfrak{K}_f(D)$デ表ハス事ニ致シマス。

本論文ノ目的ハ$\mathfrak{f}(D)$ガ normal デアル殆ンド決定

1) 参照：輓近函数論（岩波講座）(218頁)

的ナ十分條件ヲ$\mathfrak{K}_f(D)$ノ性質ニ依ツテ characterize スル事ニアリマス。

2° Normal family ニ關スル基礎的ナ性質ハ仮定致シマス。

$\boxed{\text{豫備定理}}$ $f(K)$ $(K=\{z;|z|<R\})$,

$t\in f(K)$ ニ對シ.

$$A_t(r)\leq h\,L_t(r)\qquad(0\leq r<R)$$

ナル t ニ無関係ナ常數 h ガ存在スルナラバ、$f(K)$ ハ中心デ normal デアル。

茲ニ $A_t(r)=t$ ニヨル $|z|\leq r$ ノ像ノ全面積.

$L_t(r)=t$ ニヨル $|z|=r$ ノ像ノ全長

証明; 仮定ヨリ

$$A_t(r)\leq 2\pi h^2\Big/\log\frac{R}{r}\ ^{(2)}$$

從ツテ r ヲ十分小ニスレバ

$$A_t(r)\leq\delta<\frac{\pi}{6}\quad(r\leq\rho)$$

依ツテ Riemannsphere 上ニ disjoint ナ面積 $\pi/6$ ヲ持ツ Jordandomain 5箇ヲ選ベバ $\mathfrak{K}_f(k)$ ハ其ノ何レノ上ニモ單葉ナ island ヲ持タナイ $(k=\{z;|z|<\rho\})$.

依ツテ Bloch ノ定理[3]ニ依リ $f(k)$ ハ normal デアル。

(証明終)

---

(2) R. Nevanlinna: Eindeutige analytische Funktionen (1936) (S. 343)

(3) G. Valiron: Familles normales et quasinormales de fonctions méromorphes. (1929).

(Bloch ノ定理ヲ用ヰナイ方法ガ望マシイ) (S. 46)

$\boxed{\text{基本定理}}$ $f(D)$ $\mathfrak{R}_f(D)$ ノ意味ハ前ノ通リトスル。今 Riemann sphere 上ニ或ル q 箇ノ disjoint ナ Jordan domain $D_i\ (i=1,2,\cdots\cdots,q)$ ガ存在シ、D_i 上ノ $\mathfrak{R}_f(D)$ ノ island ハ少クトモ μ_i 葉（island 無キ場合ハ $\mu_i=\infty$）ニシテ

$$\sum_{i=1}^{q}\left(1-\frac{1}{\mu_i}\right)>2 \qquad (\#)$$

ガ成立スルナラバ、$f(D)$ハ Dデ normalfamily ヲ形成スル。

証明：　$\sum_{1}^{q}\left(1-\frac{1}{\mu_i}\right)=p\ (>2)$ ト置ク。今任意ニ $\xi\in D$ ヲ採リ $\overline{U}_R(\xi)\subset D$ ニ補助定理ヲ適用シマス。先ヅ $\mathfrak{R}_f(D)$ デ（#）ガ成立スレバ勿論 $\mathfrak{R}_f(\overline{U}_R(\xi))$ デ成立シ、又各 $f\in f(\overline{U}_R(\xi))$ デ成立シマス。従ッテ

$$\sum_{1}^{q}\left(1-\frac{1}{\mu_i}\right)\leq 2+h(D_i)\ \frac{L_f(r)}{A_f(r)}{}^{(4)}$$

ニ依リ　　$A_f(r)\leq\dfrac{h(D_i)}{p-2}\ \dfrac{L_f(r)}{A_f(r)}$

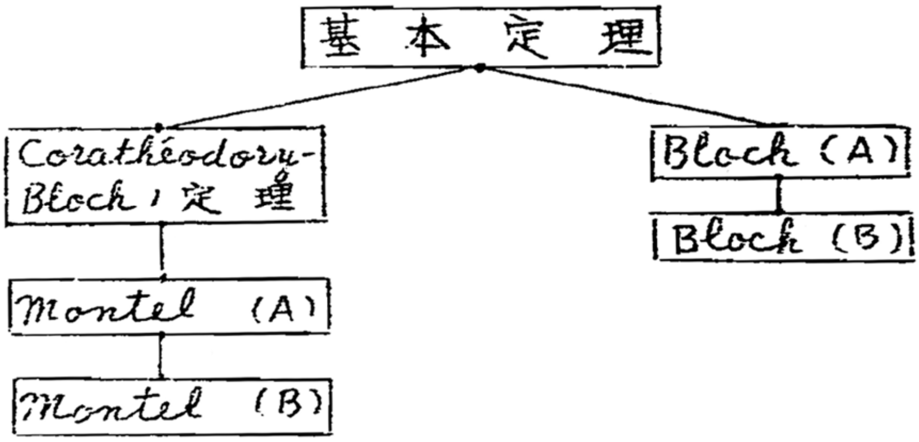
茲ニ $h(D_i)$ ハ各 $f\in f(\overline{U}_R(\xi))$ ニ depend 致シマセン。依ッテ豫備定理ニヨリ、$f(D)$ ハ ξデ normal デアリマス。$\xi\in D$ ハ任意デアリマシタカラ、結局 $f(D)$ ハ Dデnormal デアリマス。

（証明終）

---

(4) R.N (S.336)

3° 2°デ述ベタ事ハ云ハバ $\mathfrak{R}f(D)$ ガ regulär ausschöpffen" デナイト云フ様ナ性質ガ normality ノ十分條件トナルト云フ事デアリマス。以下今迄知ラレタ此ノ方面ノ主ナ結果ヲ參考迄ニ擧ゲテ見マス。



茲ニ Carathéodory-Block ノ定理トハ或ル8箇ノ点ニ對シ(#)ガ成立スレバ normal デアルト云フ事。Montel (A), (B) ハ $\mathfrak{R}f(D)$ ガ夫々三点, $[w,a]<\delta$ ヲ覆ハナケレバ normal デアルト云フ事。Block(A) トハ或ル五箇ノ disjoint ナ Jordan domain ノ上ニ $\mathfrak{R}f(D)$ ガ單葉ナ island ヲ持タナケレバ normal デアルト云フ事。Block(B) トハ $\mathfrak{R}f(D)$ ニ含マレル單葉円板ノ半径ガ有界ナラバ normal デアルト云フ事デアリマス（f ハ正則函数ノミヨリ成ル）。

4° 最後ニ基本定理ヲ用キテ孤立眞正特異点ノ近傍ノ性質ヲ調ベテ見マス。Riemann sphere ヲ廻転シテ考ヘレバ一般性ヲ失ナフ事ナク ∞ ガ孤立眞性特異点デ $f(z)$ ハ

$R<|z|<\infty$ デ有理型ト仮定シテ差支ヘナイ。然ラバ所謂 Julia ノ Method ヲ用キ次ノ定理ガ得ラレマス。

$\boxed{\text{定 理}}$ $f(z)$ ヲ $R<|z|<\infty$ デ有理型、∞ ヲ真性特異点、又其ノ Riemannian image ハ少クトモ一ツノ超越特異点ヲ持ツモノトスル。然ラバ $\arg z=\theta$ ナル特定ノ方向ガ少クトモ一本存在シ $|\arg z-\arg\theta|<\varepsilon$ ナル如何程デモ少サイ開キヲ持ツ角領域ニ於イテ

„Scheibensatz"

$$\sum_{i=1}^{q}\left(1-\frac{1}{\mu_i}\right)\leqq 2$$

ガ成立スル。

此ノ定理ハ勿論、更ニ一般ナ形ニ述ベル事ガ出来マスガ、此ノ形ニ於テ最モ興味ガアルト思ハレマス。

(1944, 5, 20)